ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАР ОПЕРАТОРОВ, ГИБРИДЫ ЛИ, СКОБКИ ПУАССОНА И НЕЛИНЕЙНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА.

Д. В. Юрьев

funct-an/yymmxxx

Как показывает история математики, поиск решениё "диких", но внутренне красивых задач имеет подчас большую значимость, чем точные ответы к корректно сформулированным "ручным" проблемам. Одноё из таких "диких" задач является классификация пар линеёных операторов в фиксированном линеёном топологическом (даже конечномерном) пространстве. Несмотря на явную трансцендентность этоё задачи (и во многом в силу этого), "отблеск ей сияющего шлеёфа" – анализ различных числовых и алгебраических характеристик пар операторов – представляет несомненныё интерес как с абстрактноё, так и с прикладноё точек зрения. И если *обратная задача теории представлениё* заключается в восстановлении алгебраического объекта по заданному семеёству "представляющих" операторов (матриц)(см.напр. [1]), то разумно поиск различных структур, являющихся алгебраическими, геометрическими и геометроалгебраическими характеристиками заданного семеёства операторов (матриц) относить к *расширенному толкованию* обратноё задачи. Данная работа посвящена первоначальному изучению ряда подобных характеристик для пары операторов.

Общиё план работы таков. Пара операторов характеризуется некоторым алгебраическим объектом, своим "инвариантом", гибридом Ли (линеёным пространством, оснащйнным пароё согласованных скобок Ли). В определйнном смысле указанныё объект можно считать "стабилизатором" инфинитезимального деёствия другого алгебраического объекта, псевдогибрида Ли (линеёного пространства, оснащйнного пароё согласованных структур псевдоалгебр Ли [2]) на парах операторов. Согласованность структур псевдоалгебр Ли означает, что любая линеёная комбинация соответствующих структурных функциё снова задайт структуру псевдоалгебры Ли. Таким образом, на парах операторов задано двупараметрическое семеёство деёствиё псевдоалгебр Ли. Более того, на орбите псевдогибрида Ли задано деёствие некотороё большеё псевдоалгебры Ли (грифона данноё орбиты), получаемоё путйм добавления к деёствиям псевдоалгебр Ли, соответствующих псевдогибриду Ли, коммутативного семеёства т.н. эквигибридных вариациё.

Таким образом, пара операторов может быть охарактеризована как структуроё соответствующего гибрида Ли, так и геометрическими своёствами ей орбиты и геометроалгебраическими своёствами отвечающего её грифона, а также ассоциированного с ним семеёства изотопных луп [3,4] (см. также [2]) и их мультиалгебр Сабинина–Михеева [5].

Определение 1.

А. *Гибридом Ли* называется линеёное пространство V, снабжйнное пароё согласованных скобок Ли $[\cdot,\cdot]'$ и $[\cdot,\cdot]''$ (согласованность означает, что любая линеёная комбинация этих скобок также является скобкоё Ли) таких, что

$$(\forall X,Y,Z\in V)\ [[X,Z]',Y]''+[[X,Y]',Z]''+[[Z,Y]',X]''=\\ [[X,Z]'',Y]'+[[X,Y]'',Z]'+[[Z,Y]'',X]'.$$

Б [6]**.** Пара линеёных пространств (V_1,V_2) называется *изотопическоё пароё*, если определены отображения $m_1:V_2\otimes\wedge^2V_1\mapsto V_1$ и $m_2:V_1\otimes\wedge^2V_2\mapsto V_2$ такие, что скобки $(X,Y)\mapsto[X,Y]_A=m_1(A,X,Y)$ $(X,Y\in V_1$, $A\in V_2)$ и $(A,B)\mapsto[A,B]_X=m_2(X,A,B)$ $(A,B\in V_2,\ X\in V_1)$ являются согласованными скобками Ли при различных значениях подстрочных параметров, более того

$$[X,Y]_{[A,B]_Z}=\tfrac{1}{2}([[X,Z]_A,Y]_B+[[X,Y]_A,Z]_B+[[Z,Y]_A,X]_B-\\ [[X,Z]_B,Y]_A-[[X,Y]_B,Z]_A-[[Z,Y]_B,X]_A)$$

и

$$[A,B]_{[X,Y]_C}=\tfrac{1}{2}([[A,C]_X,B]_Y+[[A,B]_X,C]_Y+[[C,B]_X,A]_Y-\\ [[A,C]_Y,B]_X-[[A,B]_Y,C]_X-[[C,B]_Y,A]_X),$$

где $(X,Y,Z\in V_1,\ A,B,C\in V_2)$.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то $(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ является изотопическоё пароё.

Пусть H – линеёное топологическое пространство, тогда (V_1,V_2) $(V_1\simeq V_2\simeq\mathrm{End}(H))$ наделяется естественноё структуроё изотопическоё пары (*операторноё изотопическоё пары*: $[X,Y]_A=XAY-YAX$, $[A,B]_X=AXB-BXA$ $(\forall X,Y\in V_1,\ \forall A,B\in V_2)$). Конечномерную операторную изотопическую пару будем называть также *матричноё изотопическоё пароё.*

Замечание 1. Каждому гибриду Ли V отвечает изотопическая пара $(V,\mathbb{R}^2)$ с тривиальными скобками в $\mathbb{R}^2$ и vice versa.

Пусть (V_1,V_2) — изотопическая пара, $\mathfrak{A}$ – линеёное подпространство в V_2. Положим $\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}=\{X\in V_1:\ (\forall A,B\in\mathfrak{A})\ [A,B]_X\in\mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}}=\{X\in V_1:\ (\forall A,B\in\mathfrak{A})\ [A,B]_X=0\}$.

Теорема 1А. *Для произвольноё изотопическоё пары* (V_1,V_2) *и линеёного подпространства* $\mathfrak{A}\subseteq V_2$ *пары* $(\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}},\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}},\mathfrak{A})$ *и* $(\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}/\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}},\mathfrak{A})$ *обладают естественными структурами изотопических пар; при этом* $(\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}},\mathfrak{A})$ *и* $(\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}},\mathfrak{A})$ *допускают естественные вложения в* (V_1,V_2).

Пусть (V_1,V_2) — произвольная изотопическая пара и $\mathfrak{A}=\langle A,B\rangle$ – линеёное пространство, натянутое на два элемента A и B из V_2. Положим $a(A,B)=\dim\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}}$, $a_0(A,B)=\dim\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}/\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}}$.

Теорема 1Б. *$a_0(A,B) = 0,1,2$. Если $a_0(A,B) = 1$, то изотопическая пара $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}/\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}})$ является естественноё изотопическоё пароё, ассоциированноё с алгеброё Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^1)$ группы аффинных преобразованиё прямоё. Если $a_0(A,B) = 2$, то изотопическая пара $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}/\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}})$ совпадает с пароё Окубо $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ [1].*

Теорема 1В. *Если (V_1, V_2) — произвольная изотопическая пара, A и B — два элемента из V_2 и $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle$, то $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ наделяется естественноё структуроё гибрида Ли, а именно $(\forall X, Y \in \mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}})$ $[X,Y]' = [X,Y]_A, [X,Y]'' = [X,Y]_B$.*

Рассмотрим конечномерныё случаё.

Пример 1. *Если A и B две матрицы 2×2, то $a(A,B)$ равно 4, если эти матрицы пропорциональны, и 2 иначе. Если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ непропорциональны, то гибрид Ли $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ порождается матрицами*

$$\begin{pmatrix} de - ah & af - be \\ ag - ce & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} dg - ch & cf - bg \\ 0 & ag - ce \end{pmatrix}$$

и тривиален (т.е. обе скобки тождественно равны нулю). Если A и B пропорциональны, то гибрид Ли $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ реализуется в пространстве всех матриц 2×2 и нетривиален (обе скобки пропорциональны друг другу и имеют вид $(X,Y) \mapsto XAY - YAX$ или $XBY - YBX$ $(X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))$).

Аналогично может быть обсчитан менее тривиальныё случаё $n = 3$. Задача нахождения $\mathfrak{A}^{\mathfrak{i}}$ и $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ при произвольном n является линеёноё и легко программируемоё.

Замечание 2. Если $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle$ и $\mathfrak{A}' = \langle CAD, CBD\rangle$, где $C, D \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, то $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ и $(\mathfrak{A}')^{\hat{\mathfrak{i}}}$ изоморфны как гибриды Ли.

Замечание 3. Пусть $F \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{h}(F) = \langle F\rangle^{!} = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : [X,F] = 0\}$, тогда $\mathfrak{h}(F)$ наделяется естественноё структуроё гибрида Ли со скобками $[X,Y]' = [X,Y] = XY - YX$ и $[X,Y]'' = F[X,Y] = [X,Y]F = XFY - YFX$. Пусть $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle$, тогда отображения $X \mapsto XA$, $X \mapsto AX$ задают изоморфизм $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ на $\mathfrak{h}(A^{-1}B)$ и $\mathfrak{h}(BA^{-1})$, соответственно. Пусть $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и существует матрица F такая, что $AF = B$ $(FA = B)$, $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle$, тогда отображение $X \mapsto XA$ $(X \mapsto AX)$ задайт эпиморфизм $\mathfrak{A}^{\hat{\mathfrak{i}}}$ на $\mathfrak{h}(F)$.

Рассмотрим бесконечномерныё случаё. Пусть базисное линеёное пространство — пространство многочленов одноё переменноё x.

Пример 2. *Если $A = \frac{\partial}{\partial x}$ и $B = x$, то гибрид Ли порождается дифференциальными операторами P, левыё символ которых $P(x,\xi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$P''_{x\xi} + xP'_x + \xi P'_\xi + P = 0.$$

Зафиксируем базис $e_n = x^n f_n(x\frac{\partial}{\partial x})$ в пространстве решениё. Функции $f_n(\xi)$ имеют вид $f(2k) = \frac{(2k-1)!!}{(2k+n)!!}$, $f_n(2k+1) = 0$. В базисе e_n коммутационные

соотношения в гибриде Ли задаются формулами

$$[e_m, e_n]^{\cdot} = \begin{cases} 0, & \text{если } m+n \in 2\mathbb{Z}, \\ e_{n+m\pm 1}, & \text{если } m \in 2\mathbb{Z}+1,\ n \in 2\mathbb{Z}, \\ -e_{n+m\pm 1}, & \text{если } m \in 2\mathbb{Z},\ n \in 2\mathbb{Z}+1,. \end{cases}$$

Знак плюс отвечает скобке $[\cdot,\cdot]'$, а знак минус — скобке $[\cdot,\cdot]''$.

Отметим следующиё факт. Если V — гибрид Ли со скобками $[\cdot,\cdot]'$ и $[\cdot,\cdot]''$, то линеёное пространство $\mathfrak{k}(V) = V \oplus V$ наделяется структуроё алгебры Ли с коммутатором

$$[(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)] = \\ ([X_1,X_2]'' + \tfrac{1}{2}([X_1,Y_2]' - [X_2,Y_1]'), [Y_1,Y_2]' + \tfrac{1}{2}([Y_1,X_2]'' - [Y_2,X_1]'')).$$

Определение 2. Изотопическая пара (V_1, V_2) называется *контрагредиентноё*, если $V_1 = V_2^*$, $V_2 = V_1^*$ и для любых $A, B \in V_2$, $X, Y \in V_1$ выполняется цепочка равенств:

$$\langle [X,Y]_B, A\rangle = -\langle [X,Y]_A, B\rangle = \langle [A,B]_X, Y\rangle = -\langle [A,B]_Y, X\rangle,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — естественное спаривание V_1 и V_2.

Замечание 4. Конечномерная операторная изотопическая пара является контрагредиентноё.

Определим для контрагредиентноё изотопическоё пары (V_1, V_2) 4–форму $\Omega : \bigwedge^2 V_1 \otimes \bigwedge^2 V_2 \mapsto \mathbb{R}$:

$$\Omega(A,B;X,Y) = \langle [X,Y]_B, A\rangle = -\langle [X,Y]_A, B\rangle = \langle [A,B]_X, Y\rangle = -\langle [A,B]_Y, X\rangle.$$

Замечание 5. Ввиду невырожденности спаривания $V_1 \otimes V_2 \mapsto \mathbb{R}$ определены операторы $R_\Omega^{(i)} : \bigwedge^2 V_i \mapsto \bigwedge^2 V_i$ такие, что

$$\left\langle R_\Omega^{(1)}(X\wedge Y), A\wedge B\right\rangle = \Omega(A,B;X,Y) = \left\langle X\wedge Y, R_\Omega^{(2)}(A\wedge B)\right\rangle.$$

При этом операторы $R_\Omega^{(i)}$ сопряжены друг другу и антиинволютивны: $R_\Omega^{(2)} = (R_\Omega^{(1)})^*$, $R_\Omega^{(1)} = (R_\Omega^{(2)})^*$, $(R_\Omega^{(i)})^2 = -\operatorname{id}$.

Замечание 6. Пусть (V_1, V_2) — произвольная контрагредиентная изотопическая пара, $A, B \in V_2$, $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle$, тогда $\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}} = \ker \Omega_{A,B}$, где $\Omega_{A,B}(\cdot,\cdot) = \Omega(A,B;\cdot,\cdot)$. Как следствие, $\operatorname{codim}_{\operatorname{End}(V_1)} \mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}}$ — чйтно.

Замечание 7. Пусть $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $\pi : X \mapsto XA$ или AX ($X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$), тогда $\Omega_{A,B}|_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})/\mathfrak{A}^{\widehat{\mathfrak{i}}}} = \pi_*\omega_{\mathrm{Kir}}(F)$ — обратныё образ формы Кириллова [7,8] к орбите (ко)присоединенного представления группы Ли $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ точки F ($F = A^{-1}B$ или BA^{-1}) в этоё точке.

Определение 3.

А [2]. *Псевдоалгеброё Ли* векторных полеё на многообразии M называется троёка $(\mathfrak{g}, m, \tau)$, где $\mathfrak{g}$ — линеёное пространство, $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathrm{Vect}(M))$, $m \in \mathrm{Map}(M, \mathrm{Hom}(\bigwedge^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{g}))$, причйм m и τ согласованы между собоё, а именно, если положить $[X,Y]_a = m(a)(X,Y)$ $(X, Y \in \mathfrak{g},\ a \in M)$, то $[\tau(X), \tau(Y)](a) = \tau([X,Y]_a)$.

Б . *Псевдогибридом Ли* векторных полеё на многообразии M называется линеёное пространство $\mathfrak{g}$, оснащйнное двумя согласованными структурами псевдоалгебр Ли $(\mathfrak{g}, m', \tau')$ и $(\mathfrak{g}, m'', \tau'')$. Согласованность означает, что $[\tau'(X), \tau''(Y)](a) + [\tau''(X), \tau'(Y)](a) = \tau'([X,Y]''_a) + \tau''([X,Y]'_a)$ $(X, Y \in \mathfrak{g}$, $a \in M)$, где $[X,Y]'_a = m'(a)(X,Y)$ и $[X,Y]''_a = m''(a)(X,Y)$.

Если $(\mathfrak{g}, m, \tau)$ – псевдоалгебра Ли векторных полеё на многообразии M, то будем говорить, что $\mathfrak{g}$ деёствует на M; аналогично, если $(\mathfrak{g}, m', m'', \tau', \tau'')$ – псевдогибрид Ли векторных полеё на многообразии M, то будем говорить, что $\mathfrak{g}$ деёствует на M. Отметим, что если $(\mathfrak{g}, m', m'', \tau', \tau'')$ — псевдогибрид Ли, то для любых λ и μ троёка $(\mathfrak{g}, m_{\lambda,\mu}, \tau_{\lambda,\mu})$ $(m_{\lambda,\mu} = \lambda m' + \mu m''$, $\tau_{\lambda,\mu} = \lambda\tau' + \mu\tau'')$ является псевдоалгеброё Ли; таким образом, деёствие псевдогибрида Ли на фиксированном многообразии задайт двупараметрическое семеёство псевдоалгебр Ли $(\mathfrak{g}, m_{\lambda,\mu}, \tau_{\lambda,\mu})$ векторных полеё на нйм.

Пусть (V_1, V_2) — произвольная изотопическая пара. Положим $W_i = V_i \oplus V_i$.

Теорема 2А. *V_1 деёствует как псевдогибрид Ли на W_2 (и наоборот, V_2 деёствует как псевдогибрид Ли на W_1):*

$$\tau'(X)(A,B) = ([A,B]_X, 0), \quad \tau''(X)(A,B) = (0, [A,B]_X)$$
$$\tau'(A)(X,Y) = ([X,Y]_A, 0), \quad \tau''(A)(X,Y) = (0, [X,Y]_A)$$

$(X, Y \in \mathfrak{f}_1,\ A, B \in \mathfrak{f}_2)$; при этом

$$[X,Y]'_{(A,B)} = [X,Y]_B, \quad [X,Y]''_{(A,B)} = [X,Y]_A$$
$$[A,B]'_{(X,Y)} = [A,B]_Y, \quad [A,B]''_{(X,Y)} = [A,B]_X$$

Замечание 8. Если конечномерныё псевдогибрид Ли $\mathfrak{g}$ деёствует на конечномерном многообразии M, то каждая псевдоалгебра Ли векторных полеё на M из соответствующего двупараметрического семеёства псевдоалгебр Ли экспоненцируется до псевдо(квази)группы Ли преоразованиё M [2-4,9].

Определение 4.

А. *Орбитоё* псевдоалгебры Ли $(\mathfrak{g}, m, \tau)$ векторных полеё на многообразии M называется минимальное подмногообразие N такое, что $\tau(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Vect}(N)$.

Б. *Орбитоё* псевдогибрида Ли $(\mathfrak{g}, m', m'', \tau', \tau'')$ векторных полеё на многообразии M называется минимальное подмногообразие N такое, что $\tau'(\mathfrak{g}) + \tau''(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Vect}(N)$.

Замечание 9. Для произвольноё изотопическоё пары (V_1, V_2) пространство W_2 допускает $(V_1, m_{\lambda,\mu}, \tau_{\lambda,\mu})$–эквивариантное расслоение $\mathcal{P}_{\lambda,\mu}$ над базоё V_2

с проекциеё $p : W_2 \mapsto V_2$, где $p(A,B) = \lambda A + \mu B$, слоё $U(C)$ над точкоё C изоморфен V_2 для любого C. На любом слое $U(C)$ деёствие псевдоалгебры Ли $(V_1, m_{\lambda,\mu}, \tau_{\lambda,\mu})$ редуцируется до деёствия алгебры Ли $\mathfrak{l}(C)$, реализуемоё в пространстве V_1 с помощью $[\cdot,\cdot]_C$, $U(C) \simeq \mathfrak{l}^*(C)$. Таким образом, орбиты деёствия псевдоалгебры Ли $(V_1, m_{\lambda,\mu}, \tau_{\lambda,\mu})$ на W_2 совпадают с орбитами коприсоединйнных представлениё алгебр Ли $\mathfrak{l}(C)$.

Замечание 10. Для матричноё изотопическоё пары (V_1, V_2) орбиты деёствия псевдогибрида Ли V_1 на W_2 совпадают с орбитами деёствия $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, описанного в замечании 2.

Таким образом, касательное пространство к орбите псевдогибрида Ли V_1 на W_2 в произвольноё точке для матричноё изотопическоё пары не совпадает с прямоё суммоё касательных пространств к орбитам соответ ствующих псевдоалгебр Ли в указанноё точке.

Определение 5. Пусть (V_1, V_2) — произвольная изотопическая пара, $\mathcal{O}$ — орбита деёствия псевдогибрида Ли V_1 на W_2. Определим *эквигибридное слоение* $\mathcal{F}_{эг}$ на орбите $\mathcal{O}$ следующим образом: слои $\mathcal{F}_{эг}$ состоят из пар (A,B) с совпадающими гибридами Ли $\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{i}}$ ($\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{i}} = \langle A, B\rangle$).

Гипотеза. Для произвольноё изотопическоё пары (V_1, V_2) касательное пространство к орбите деёствия псевдогибрида Ли V_1 на W_2 в произвольноё точке является суммоё касательных пространств к орбитам соответствующих псевдоалгебр Ли и к эквигибридному слоению в указанноё точке.

Данная гипотеза справедлива для матричное изотопическоё пары. Более того, в этом случае эквигибридное слоение порождается коммутативным семеёством вариациё, которые мы будем называть *эквигибридными вариациями.* А именно, для произвольного $X \in \widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{i}}$ ($\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{i}} = \langle A, B\rangle$) определим вариации $\delta_{эг}(X)$ следующим образом: $\delta_{эг}(X)(A,B) = (AXA + AXB, AXB + BXB)$. Нетрудно показать, в этом случае в произвольноё точке орбиты псевдогибрида Ли имеет место разложение касательного пространства к орбите в *прямую сумму* касательных пространств к орбитам соответствующих псевдоалгебр Ли и эквигибридных вариациё (которые образуют коммутативную алгебру Ли). Как следствие, на орбите псевдогибрида Ли V_1 задано деёствие псевдоалгебры Ли $\widehat{W_1} = W_1 \oplus \widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{i}}$, где деёствие W_1 определяется деёствиями псевдоалгебр Ли (V_1, m', τ') и (V_2, m'', τ''), а деёствие $\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{i}}$ задайтся эквигибридными вариациями. Указанную псевдоалгебру Ли $\widehat{W_1}$ будем называть *грифоном* соответствующеё орбиты псевдогибрида Ли.

Замечание 11. В конечномерном случае деёствие грифона на орбите экспоненцируется до деёствия соответствующеё псевдо(квази)группы Ли [2-4,9].

Замечание 12. Разложение касательного пространства к орбите $\mathcal{O}$ псевдогибрида Ли V_1 в прямую сумму касательных пространств к орбитам псевдоалгебр Ли $(V_1, m_{\lambda',\mu'}, \tau_{\lambda',\mu'})$ и $(V_2, m_{\lambda'',\mu''}, \tau_{\lambda'',\mu''})$ ($\begin{vmatrix} \lambda' & \lambda'' \\ \mu' & \mu'' \end{vmatrix} \neq 0$) и эквигибридных вариациё означает, что эквигибридное слоение и расслоения $\mathcal{P}_{\lambda',\mu'}$, $\mathcal{P}_{\lambda'',\mu''}$ задают *сеть* [10] на орбите $\mathcal{O}$ псевдогибрида Ли V_1. Отметим также, что $(n+1)$-ка $(\mathcal{P}_{\lambda_1,\mu_1}, \ldots \mathcal{P}_{\lambda_n,\mu_n}, \mathcal{F}_{эг})$ ($\begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{vmatrix} \neq 0$ если

$i \neq j$) задайт некоторыё объект на орбите $\mathcal{O}$, своёства которого сходны со своёствами *многомерноё n–ткани* [11,12].

Замечание 13. Лупа, определяемая грифоном орбиты псевдогибрида Ли матричноё изотопическоё пары (или соответствующеё псевдо(квази)группоё Ли), и точкоё орбиты (A, B) [3,4] допускает вложение в себя группы $\mathfrak{L}_{\lambda,\mu}(C)$, отвечающеё алгебре Ли $\mathfrak{l}(C)$ $(C = \lambda A + \mu B)$, для любых λ и μ, а также коммутативноё группы, отвечающеё эквигибридным вариациям.

Определим расслоение $\mathcal{P}_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ над орбитоё $\mathcal{O}$ псевдогибрида Ли, слоё которого над точкоё (A, B) совпадает с $\langle A, B\rangle^{\widehat{\mathfrak{i}}}$. В расслоении $\mathcal{P}_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ задана связность ∇ такая, что

$$\begin{aligned}&\nabla_{\tau'(Z_1)+\tau''(Z_2)+\delta_{\mathcal{H}}(Z_0)}((A, B), X) =\\ &\qquad((\tau'(Z_1) + \tau''(Z_2) + \delta_{\mathcal{H}}(Z_0))(A, B), [Z_1, X]_B + [Z_2, X]_A),\end{aligned}$$

где $Z_1, Z_2 \in V_2$, $Z_0, X \in \langle A, B\rangle^{\widehat{\mathfrak{i}}}$. Рассмотрим также двоёственное расслоение $\mathcal{P}^*_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ над $\mathcal{O}$ со слоем $(\langle A, B\rangle^{\widehat{\mathfrak{i}}})^*$ над точкоё (A, B), в котором определена двоёственная связность ∇^*. Ковариантные производные в $\mathcal{P}^*_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ вдоль элементов грифона орбиты замыкаются до деёствия некотороё псевдоалгебры Ли, которую будем называть *каноническим расширением грифона.*

Замечание 14. Для матричноё изотопическоё пары связность ∇^* в расслоении $\mathcal{P}^*_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ задайт поднятие деёствия дубля $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ на базе до его свободного и транзитивного деёствия $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ на тотальном пространстве. Как следствие, на тотальном пространстве расслоения $\mathcal{P}^*_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ задана пуассонова структура дубля Геёзенберга [13,14].

Определение 6 (ср. [2]). Псевдоалгебра Ли $(\mathfrak{g}, m, \tau)$ называется *гамильтоновоё*, если соответствующее многообразие M – пуассоново и задано линеёное отображение $\hat{\tau} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathcal{O}(M))$ такое, что $\tau(X)F = \{\hat{\tau}(X), F\}$ $(X \in \mathfrak{g},\ F \in \mathcal{O}(M)$. Если $(\mathfrak{g}, m, \tau)$ – гамильтонова псевдоалгебра Ли векторных полеё на пуассоновом многообразии M, то будем говорить, что $\mathfrak{g}$ деёствует на M гамильтоново.

Теорема 2Б. Пуассонова структура на $\mathcal{P}^*_{\widehat{\mathfrak{i}}}$ инвариантна относительно деёствия канонического расширения грифона, являющегося гамильтоновым.

Автор надеется, что данная заметка послужит стимулом для установления более тесных связеё между классическими направлениями функционального анализа с одноё стороны и современными исследованиями по нелинеёным скобкам Пуассона (А.Ваёнштеён–М.В.Карасёв–В.П.Маслов [2]), нелинеёноё геометрическоё алгебре (Л.В.Сабинин–П.О.Михеев [15, 16], см. также [17]) и бесконечномерноё симплектическоё геометрии с другоё.

Автор благодарит Лабораторию Теоретическоё Физики Высшеё Нормальноё Школы (Париж) за исключительную атмосферу, в котороё возник замысел этоё работы, и Международныё Институт Математическоё Физики имени Эрвина Шрёдингера (Вена), где работа была завершена, за поддержку и любезное гостеприимство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Juriev D., Topics in hidden symmetries, E–print (LANL Archive on Theor. High Energy Phys.): *hep-th/9405050* (1994).

[2] Карасйв М.В., Маслов В.П., Нелинеёные скобки Пуассона: геометрия и квантование, М., Наука, 1992.

[3] Михеев П.О., О лупах преобразованиё. В сб. "Некоторые приложения дифференциальноё геометрии". М., 1985, С.85-93. Рук. деп. в ВИНИТИ 4531-85Деп.

[4] Mikheev P.O., Quasigroups of transformations, Trans. Inst. Phys. Estonian Acad. Sci. 1990. V.66. P.54-66.

[5] Сабинин Л.В., Михеев П.О., Об инфинитезимальноё теории локальных аналитических луп, Доклады АН СССР, 1988, Т.297, С.801-805.

[6] Juriev D., Topics in isotopic pairs and their representations, E–print (Texas Archive on Math. Phys.): *mp_arc/94-267* (1994).

[7] Кириллов А.А., Элементы теории представлениё, М., Наука, 1971.

[8] Фоменко А.Т., Симплектическая геометрия. Методы и приложения, М., Изд-во МГУ, 1988.

[9] Batalin I., Quasigroup construction and first class constraints. J. Math. Phys. 1981. V.22. P.1837-1850.

[10] Базылев В.Т., Кузьмин М.К., Столяров А.В., Сети на многообразиях. В сб. "Проблемы геометрии 12". М., ВИНИТИ, 1981, С.97-125.

[11] Gol'dberg V., Theory of multicodimensional $(n+1)$–webs. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988.

[12] Akivis M.A., Shelekhov A.M., Geometry and algebra of multidimensional 3-webs. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.

[13] Semenov-Tian-Shansky M.A., Dressing transformations and Poisson-Lie group actions. Publ. RIMS Kyoto, 1985, V.21, P.1237-1260.

[14] Alekseev A.Yu., Malkin A.Z., Symplectic structures associated to Lie-Poisson groups. Commun. Math. Phys. 1994. V.***. P.***-***; E–print (LANL Archive on High Energy Phys): *hep-th/9303038* (1993).

[15] Сабинин Л.В., О нелинеёноё геометрическоё алгебре. В сб. "Ткани и квазигруппы". Калинин (Тверь), 1988, С.32-37.

[16] Сабинин Л.В., Михеев П.О., Гладкие квазигруппы и геометрия. В сб. "Проблемы геометрии 20". М., ВИНИТИ, 1988, С.75-110.

[17] Сабинин Л.В., Методы неассоциативноё алгебры в дифференциальноё геометрии, Прилож. к русск. пер. кн. Кобаяси С., Номидзу К., Основы дифференциальноё геометрии. Т.1. М., Наука, 1982.

Отдел математики, Научно-исследовательскиё
институт системных исследованиё РАН
E-mail address: juriev@systud.msk.su

Erwin Schrödinger Institut

für Mathematische Physik,
Wien, Österreich (Austria)
E-mail address: jdenis@esi.ac.at